NOTAZIONI ASINTOTICHE

- USEREMO LE SEGUENTI NOTAZIONI ASINTOTICHE PER CARATTERIZZARE IL TASSO DI CRESCITA DEL TEMPO DI ESECUZIONE DI UN DATO ALGORITMO

- SIA $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, OVE $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\Theta(g(n)) = \{ f(n) :$ ESISTONO $c_1, c_2 > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ TALI CHE $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$, PER OGNI $n \geq n_0 \}$

$O(g(n)) = \{ f(n) :$ ESISTE $c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $0 \leq f(n) \leq c\, g(n)$, PER OGNI $n \geq n_0 \}$

$\Omega(g(n)) = \{ f(n) :$ ESISTE $c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $0 \leq c\, g(n) \leq f(n)$, PER OGNI $n \geq n_0 \}$

- SCRIVIAMO $f(n) = \Theta(g(n))$, $f(n) = O(g(n))$, $f(n) = \Omega(g(n))$

PER INTENDERE, RISPETTIVAMENTE,

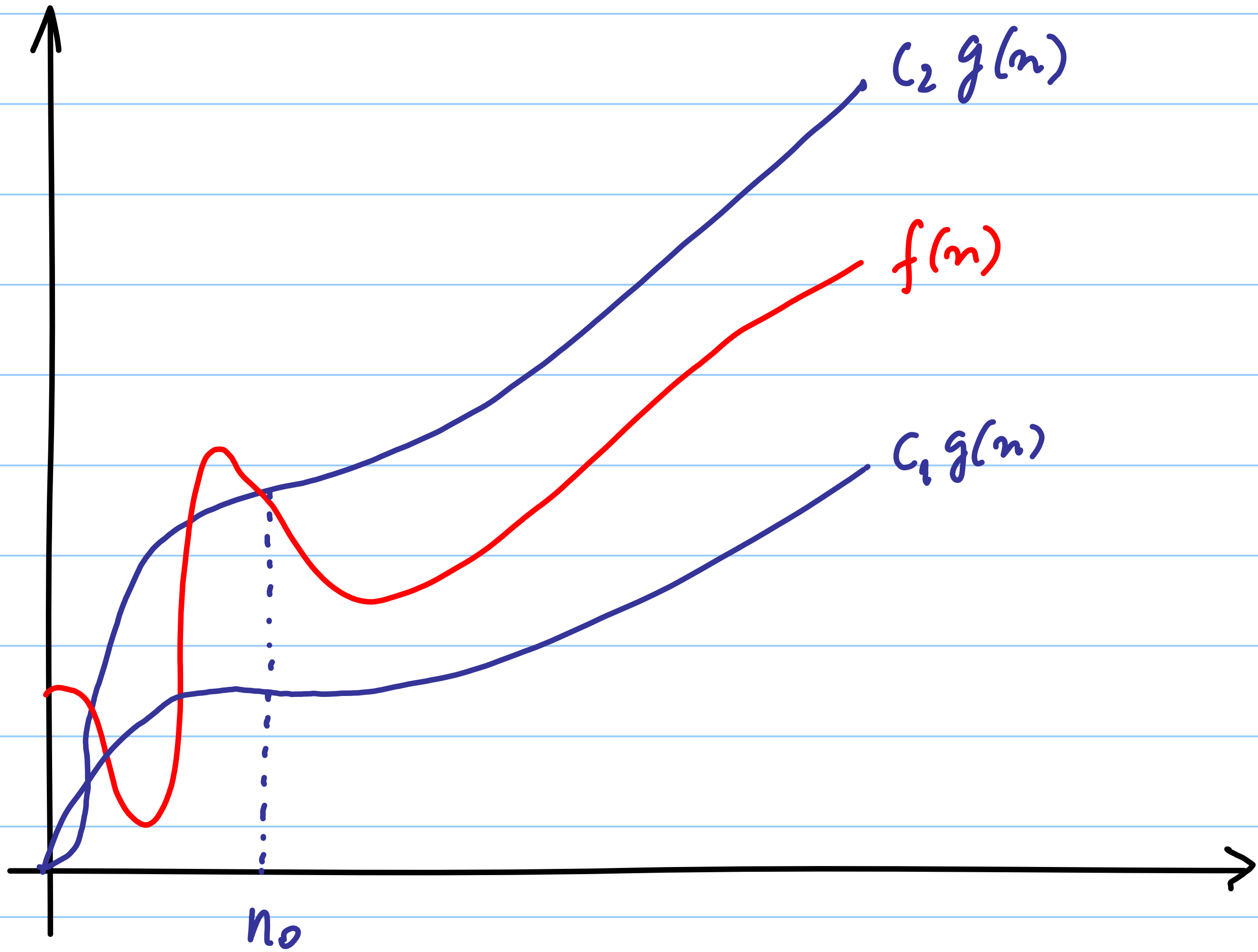
$f(n) \in \Theta(g(n))$, $f(n) \in O(g(n))$, $f(n) \in \Omega(g(n))$

- SE $f(n) = \Theta(g(n))$, ALLORA $g(n)$ E' UN LIMITE ASINTOTICAMENTE STRETTO PER $f(n)$

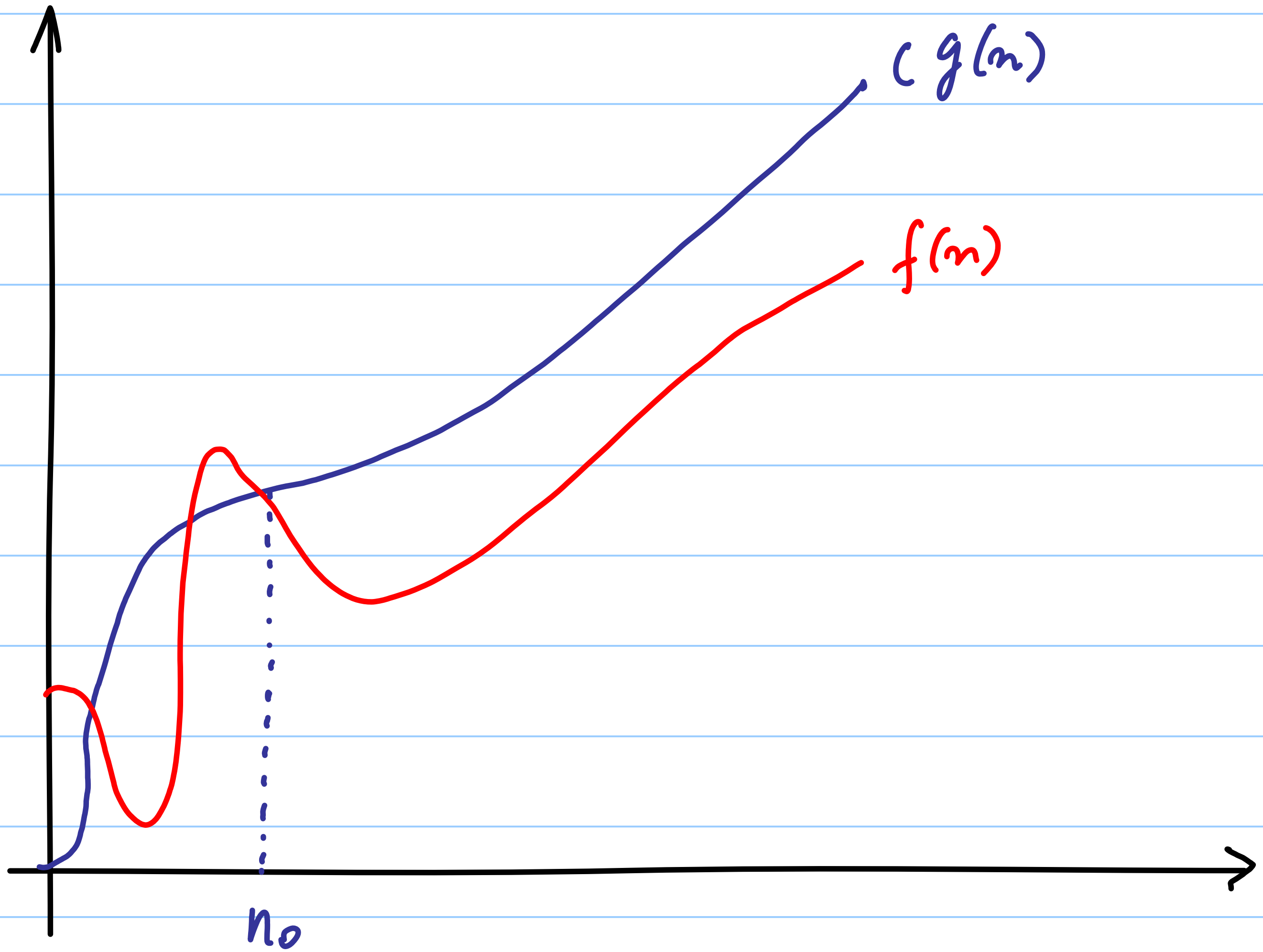
- SE $f(n) = O(g(n))$, ALLORA $g(n)$ E' UN LIMITE ASINTOTICO SUPERIORE PER $f(n)$

- SE $f(n) = \Omega(g(n))$, ALLORA $g(n)$ E' UN LIMITE ASINTOTICO INFERIORE PER $f(n)$

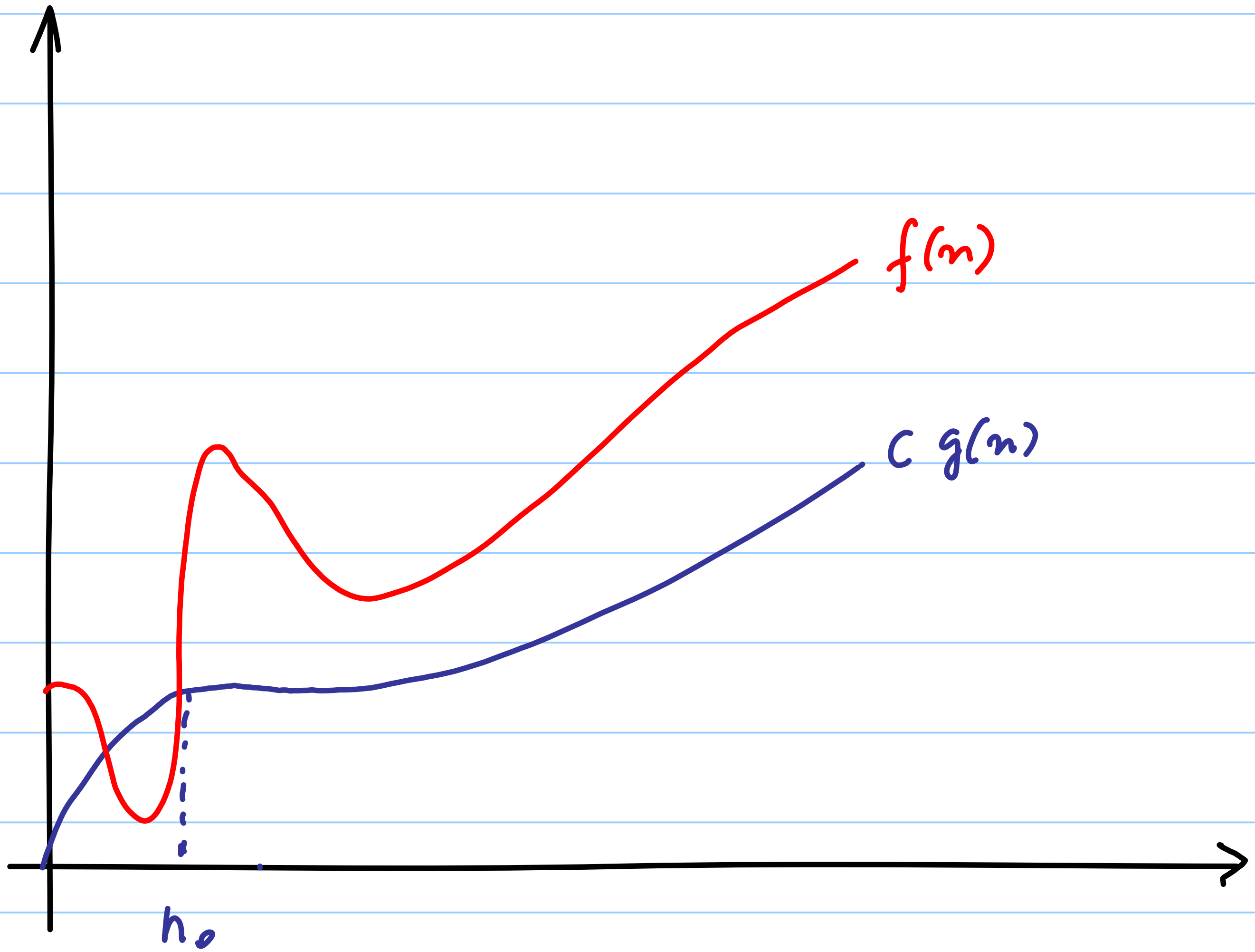
RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE



$$f(n) = \Theta(g(n))$$



$$f(n) = O(g(n))$$



$$f(n) = \Omega(g(n))$$

ES. $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

OCCORRE DETERMINARE $c_1, c_2 > 0$ ED $n_0 \in \mathbb{N}$ TALI CHE

$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, \quad \text{PER OGNI } n \geq n_0$$

DIVIDENDO PER n^2 SI HA:

$$c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$$

- SCEGLIENDO $c_2 \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$ VALE $\forall n \geq 1$
- SCEGLIENDO $0 < c_1 \leq \frac{1}{14}$, $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n}$ VALE $\forall n \geq 7$
- DUNQUE, AD ESEMPIO, $\frac{1}{14}n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq \frac{1}{2}n^2$, $\forall n \geq 7$

Es. $6n^3 \neq \Theta(n^2)$

- SE FOSSE $6n^3 = \Theta(n^2)$, ALLORA ESISTEREBBERO $c_2 > 0$ ED $n_0 \in \mathbb{N}$ TALI CHE $6n^3 \leq c_2 n^2$, PER $n \geq n_0$
- DIVIDENDO PER n^2, $6n \leq c_2$, PER $n \geq n_0$, ASSURDO.
- ALLA STESSA MANIERA, SI VERIFICA CHE $6n^3 \neq O(n^2)$

LEMMA SIANO $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ E $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$.

(a) $\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0 \implies f(n) = \Theta(g(n))$

(b) $\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \implies f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) \neq \Omega(g(n))$

(c) $\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty \implies f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) \neq O(g(n))$

DIM (a) SIA $\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0$ E SIA $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$.

ESISTE $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE, $\forall n \geq n_0$,

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} - a \right| < \frac{a}{2} \iff -\frac{a}{2} < \frac{f(n)}{g(n)} - a < \frac{a}{2}$$

$$\iff \frac{a}{2} < \frac{f(n)}{g(n)} < \frac{3}{2}a \iff \frac{a}{2} g(n) < f(n) < \frac{3}{2} a\, g(n)$$

DA CUI $f(n) = \Theta(g(n))$.

(b) SIA $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ E SIA $\varepsilon > 0$.

ESISTE $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE, $\forall n \geq n_0$,

$$\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \varepsilon \longrightarrow 0 \leq f(n) < \varepsilon g(n) \Longrightarrow f(n) = O(g(n)).$$

SE, PER ASSURDO, $f(n) = \Omega(g(n))$, ALLORA $f(n) \geq k g(n)$, PER QUALCHE $k > 0$ E n SUFFICIENTEMENTE GRANDE, CONTRADDICENDO $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$. PERTANTO $f(n) \neq \Omega(g(n))$.

(c) SIA $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ E SIA $c > 0$.

ESISTE $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE, $\forall n \geq n_0$,

$$\frac{f(n)}{g(n)} > c \longrightarrow 0 < c\, g(n) < f(n) \Longrightarrow f(n) = \Omega(g(n)).$$

ANALOGAMENTE A SOPRA, SI DIMOSTRA CHE $f(n) \neq O(g(n))$. ∎

COROLLARIO SIANO $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$.

(a) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0 \implies f(n) = \Theta(g(n))$

(b) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a \geq 0 \implies f(n) = O(g(n))$

(c) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0 \implies f(n) = \Omega(g(n))$ $\blacksquare$

ES. SIA $P(n)=\sum_{i=0}^{d} a_i n^i$ UN POLINOMIO DI GRADO d, CON $a_d>0$

ALLORA $P(n) = \Theta(n^d)$.

INOLTRE $P(n) = O(n^\alpha)$, PER OGNI $\alpha \geq d$,

$P(n) = \Omega(n^\beta)$, PER OGNI $0 \leq \beta \leq d$

PER IL COROLLARIO PRECEDENTE E' SUFFICIENTE OSSERVARE CHE

- $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{n^d} = a_d > 0$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{n^\alpha} = a \geq 0$, PER OGNI $\alpha \geq d$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{n^\beta} > 0$, PER OGNI $0 \leq \beta \leq d$

SCRIVEREMO $\Theta(1)$ AL POSTO DI $\Theta(n^0)$.

PER OGNI COSTANTE $c>0$ SI HA: $c=\Theta(1)$

PROPRIETA'

- $\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$
- $\Theta(g(n)) \subseteq \Omega(g(n))$
- $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

NOTAZIONE $o(g(n))$

$o(g(n)) = \{ f(n)$: PER OGNI $c>0$ ESISTE $n_0>0$ TALE CHE $0 \leq f(n) < c\,g(n)$, PER OGNI $n \geq n_0 \}$

- SI OSSERVI CHE $n^2 \neq o(n^2)$

PROPRIETA'

PER $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ SI HA:

$$f(n) = o(g(n)) \iff \lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

NOTAZIONE $\omega(g(n))$

$\omega(g(n)) = \{ f(n)$: PER OGNI $c>0$ ESISTE $n_0>0$ TALE CHE $0 \leq c\,g(n) < f(n)$, PER OGNI $n \geq n_0 \}$

- SI OSSERVI CHE $n^2 \neq \omega(n^2)$

PROPRIETA'

PER $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ SI HA:

$$f(n) = \omega(g(n)) \iff \lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$$

ALTRO USO DELLE NOTAZIONI ASINTOTICHE

- $h(n) = k(n) + \omega(g(n))$ SIGNIFICA

  ESISTE $f(n) = \omega(g(n))$ TALE CHE $h(n) = k(n) + f(n)$

- $h(n) + \omega(g(n)) = \omega(k(n))$ SIGNIFICA

  PER OGNI $f(n) = \omega(g(n))$, $h(n) + f(n) = \omega(k(n))$

RELAZIONI TRA LE VARIE NOTAZIONI

TRANSITIVITÀ

$$f(n) = \Theta(g(n)) \wedge g(n) = \Theta(h(n)) \implies f(n) = \Theta(h(n))$$

(ANCHE PER O, Ω, o, ω)

RIFLESSIVITÀ

$$f(n) = \Theta(f(n))$$
$$f(n) = O(f(n))$$
$$f(n) = \Omega(f(n))$$

ANTI RIFLESSIVITÀ

$$f(n) \neq o(f(n))$$
$$f(n) \neq \omega(f(n))$$

SIMMETRIA

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff g(n) = \Theta(f(n))$$

SIMMETRIA TRASPOSTA

$$f(n) = O(g(n)) \iff g(n) = \Omega(f(n))$$

$$f(n) = o(g(n)) \iff g(n) = \omega(f(n))$$

- SI OSSERVI L'ANALOGIA TRA IL CONFRONTO ASINTOTICO DI DUE FUNZIONI f, g E IL CONFRONTO DI DUE NUMERI REALI a, b

$$f(n) = O(g(n)) \approx a \leq b$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \approx a \geq b$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \approx a = b$$

$$f(n) = o(g(n)) \approx a < b$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \approx a > b$$

- TUTTAVIA LA PROPRIETA' DI TRICOTOMIA NON E' VALIDA PER IL CONFRONTO ASINTOTICO:

$$f(n) = n$$

$$g(n) = n^{1 + \sin n}$$

$f(n)$ E $g(n)$ NON SONO ASINTOTICAMENTE CONFRONTABILI

NOTAZIONI STANDARD E FUNZIONI COMUNI

$\lfloor x \rfloor$ = (massimo intero $\leq x$) (floor)

$\lceil x \rceil$ = (minimo intero $\geq x$) (ceiling)

$\forall x \in \mathbb{R}$: $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a, b \in \mathbb{N}^+$

$\lceil \lceil n/a \rceil / b \rceil = \lceil n/ab \rceil$, $\lfloor \lfloor n/a \rfloor / b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor$

- $f(n)$ E' POLINOMIALMENTE LIMITATA SE

$$f(n) = O(n^k) \quad , \text{ PER QUALCHE } \quad k \geq 0$$

ESPONENZIALI

- POICHE' $\lim_{n \to \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$, $\forall b \ \forall a > 1$

SI HA CHE $n^b = o(a^n)$

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

- $e^x \geq 1 + x$

- $|x| \leq 1 \implies 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2$

- $e^x = 1 + x + \Theta(x^2)$

- $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

LOGARITMI

$\lg n := \log_2 n$ (LOGARITMO BINARIO)

$\ln n := \log_e n$ (LOGARITMO NATURALE)

$$|x| < 1 \implies \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$x > -1 \implies \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

- $f(n)$ E' POLILOGARITMICAMENTE LIMITATA SE $f(n) = O(\lg^k n)$ PER QUALCHE k

- $a > 0 \implies \lim_{n \to +\infty} \frac{\lg^b n}{n^a} = 0$ E DUNQUE $\lg^b n = o(n^a)$

- $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$; $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$; $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

FATTORIALI

FORMULA DI APPROSSIMAZIONE DI STIRLING:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

- $n! = o(n^n)$
- $n! = \omega(2^n)$
- $\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$
- $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n}$, CON $\frac{1}{12n+1} < \alpha_n < \frac{1}{12n}$

SOMMATORIE

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \Theta(n^3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \Theta(n^4)$$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$$|x|<1 \implies \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + O(1)$$